第 14 講　万有引力

1

次の［　　］に当てはまる数式を答えよ。

地球の半径を R，質量を M，万有引力定数を G としたとき，地表にある質量 m の物体と地球との間に働く万有引力の大きさは［　①　］と表される。地表での重力加速度 g を使えば，同じ物体に働くこの力は［　②　］と表される。したがって重力加速度 g は，G と R と M で表せば $g=$［　③　］となる。

地表の近くを運動している人工衛星を考えよう。半径 R，速さ v で等速円運動している人工衛星の加速度の大きさは［　④　］である。運動方程式から，人工衛星の速さは g を用いて $v=$［　⑤　］と表される。これを第１宇宙速度と呼び，約 7.9 [km/s] である。

地表近くに質量 m の人工衛星がある。この人工衛星の万有引力による位置エネルギーは，G と R を用いれば［　⑥　］と表される。したがって，地表から速さ v で打ち上げられた質量 m の人工衛星の持つ力学的エネルギーは，$E=$［　⑦　］と表すことができる。力学的エネルギー保存の法則から，$E \geqq 0$ であれば，人工衛星は地球から無限遠方に脱出できる。脱出できる条件は g を用いて $v \geqq$［　⑧　］となる。脱出するための最小の速さを第２宇宙速度という。第２宇宙速度と第１宇宙速度の比は，地球でも他の惑星でも同じである。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

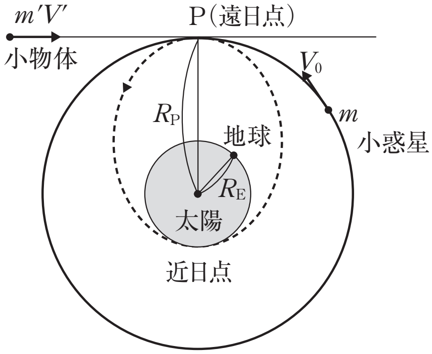
＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

質量 M の太陽のまわりを回っている質量 m の小惑星がある。図のように，この小惑星および地球の公転軌道は円とみなすことができ，その公転半径は R_{P}，R_{E} である。ケプラーの３法則および万有引力の法則を用いて次の問に答えよ。ただし，太陽の万有引力のみを考慮し，他の惑星の影響は無視してよい。万有引力定数を G とする。



ケプラーの３法則は次のとおりである。

第１法則：惑星は太陽を焦点とする楕円軌道を描く。

第２法則：惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に掃引する面積（面積速度）は惑星の軌道上あらゆる点で一定である。

第３法則：惑星が太陽のまわりを回る周期の２乗は，楕円軌道の長半径の３乗に比例する。その比例定数は惑星によらず一定である。

(1)　小惑星の速さ V_0 を G，M，R_{P} で表せ。

図のように質量 m'，速さ V' の小物体が小惑星の軌道の接線方向から飛んで来て，点Pで小惑星に正面衝突して一体となった。小惑星の公転の向きは変わらなかったが，小惑星の公転軌道は楕円となった。近日点における太陽との間の距離は地球公転軌道半径 R_{E} に等しく，遠日点における太陽との間の距離はもとの公転軌道半径 R_{P} に等しかった。次の問に答えよ。

(2)　衝突直後の小惑星の速さ u_{f} を m，m'，V_0，V' を用いて表せ。

(3)　衝突後，太陽から r の距離にあり，速さ V で楕円運動している小惑星の力学的エネルギー E を m，m'，r，V，G，M を用いて表せ。ただし，位置エネルギーは無限遠方をゼロとする。

(4)　小惑星の近日点における速さ u_{n} と遠日点における速さ u_{f} との比 $u_{\mathrm{n}}/u_{\mathrm{f}}$ を求めよ。

(5)　u_{f} を G，M，R_{E}，R_{P} を用いて表せ。

(6)　衝突後，小惑星が最初に近日点にやってくるのは何年後か。ただし，R_{P} は R_{E} の３倍，１年は 3.14×10^{7} 秒とし，有効数字２桁で答えを求めよ。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

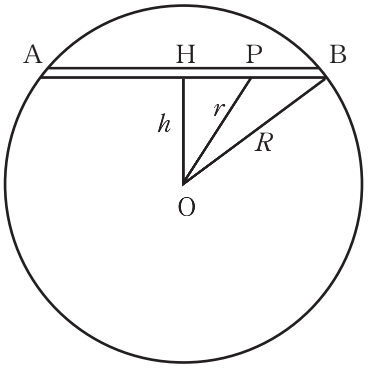
＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

図でABは地球に掘った直線状の細いトンネルである。いま，地球を半径R，一様な密度ρの球として，トンネルにそった質点の直線運動を考える。ただし，地球の自転の影響，摩擦および空気の抵抗は無視する。



（1）　質量mの質点に働く地表での重力mg（gは地表における重力の加速度）は，地球の全質量Mがその中心Oに集まったとして，それと質点との間の万有引力に等しい。万有引力定数を与えられた文字で表せ。

トンネル内の任意の一点P（$OP = r$）で質点に働く重力は，Oを中心とした半径OPの球の質量が中心Oに集まったとして，それと質点との間の万有引力に等しく，この球の外側の部分は，この点での重力には無関係であることが知られている。

（2）　トンネル内の任意の1点Pにおいて

(a)　質点に働く重力の大きさをm，g，r，Rで表せ。

(b)　重力のトンネルの方向の分力の大きさをm，g，R，xで表せ。ただし，図ではHはOからABに下した垂線の足で，$x = HP$である。

トンネルにそった質点の運動は単振動となる。

（3）　トンネル内での質点の単振動の周期を求めよ。

（4）　トンネル内で質点に働くトンネルの方向の力が，（2）(b)で求められることを考慮して

(a)　点Hを位置エネルギーの基準点にとり，点Bにおける質点の位置エネルギーをm，g，R，hで表せ。

(b)　質点が点Bで静止の状態から運動を始めるとして，質点が点Hを通過するときの速さをg，R，hで表せ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

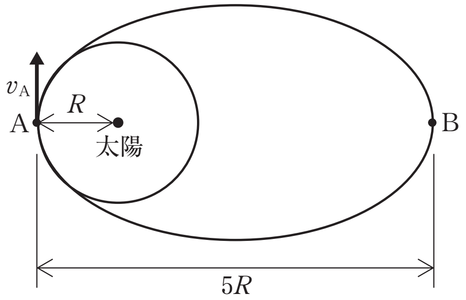
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確認テスト

以下の［ 1 ］から［ 9 ］にあてはまる答えを各解答群から1つ選び，マークせよ。ただし，解答が数値の場合は最も近い値を正解とする。また，同じ番号の解答をくりかえし選んでもよい。

宇宙船がエンジンを切って，質量 M の太陽のまわりを公転周期 T，半径 R の等速円運動をしている。万有引力定数を G として以下の問に答えよ。ただし惑星の重力による影響はないものとする。



(1)　この宇宙船の速さは［ 1 ］である。また，宇宙船の質量を m とすると，宇宙船にはたらく向心力の大きさは［ 2 ］である。

［ 1 ］の解答群

① $\dfrac{R}{2T}$　② $\dfrac{2R}{3T}$　③ $\dfrac{R}{T}$　④ $\dfrac{2R}{T}$

⑤ $\dfrac{\pi R}{2T}$　⑥ $\dfrac{2\pi R}{3T}$　⑦ $\dfrac{\pi R}{T}$　⑧ $\dfrac{2\pi R}{T}$

［ 2 ］の解答群

① $\dfrac{\pi mR}{2T^2}$　② $\dfrac{\pi mR}{T^2}$　③ $\dfrac{2\pi mR}{T^2}$　④ $\dfrac{4\pi mR}{T^2}$

⑤ $\dfrac{\pi^2 mR}{2T^2}$　⑥ $\dfrac{\pi^2 mR}{T^2}$　⑦ $\dfrac{2\pi^2 mR}{T^2}$　⑧ $\dfrac{4\pi^2 mR}{T^2}$

太陽と宇宙船との間の万有引力の大きさは［ 3 ］である。この万有引力が向心力となるので，関係式 $\dfrac{R^3}{T^2}=$［ 4 ］が成り立つ。したがって公転周期と軌道半径を測定すると，太陽質量は $M=$［ 5 ］と求められる。

［ 3 ］の解答群

① $G\dfrac{mM}{2R}$　② $G\dfrac{mM}{R}$　③ $2G\dfrac{mM}{R}$　④ $4G\dfrac{mM}{R}$

⑤ $G\dfrac{mM}{2R^2}$　⑥ $G\dfrac{mM}{R^2}$　⑦ $2G\dfrac{mM}{R^2}$　⑧ $4G\dfrac{mM}{R^2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4 の解答群

① $\dfrac{GM}{4\pi^2}$　② $\dfrac{GM}{2\pi^2}$　③ $\dfrac{GM}{\pi^2}$　④ $\dfrac{2GM}{\pi^2}$

⑤ $\dfrac{\pi^2 GM}{4}$　⑥ $\dfrac{\pi^2 GM}{2}$　⑦ $\pi^2 GM$　⑧ $2\pi^2 GM$

5 の解答群

① $\dfrac{\pi^2 R^3}{2GT^2}$　② $\dfrac{\pi^2 R^3}{GT^2}$　③ $\dfrac{2\pi^2 R^3}{GT^2}$　④ $\dfrac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$

⑤ $\dfrac{\pi^2 GR^3}{2T^2}$　⑥ $\dfrac{\pi^2 GR^3}{T^2}$　⑦ $\dfrac{2\pi^2 GR^3}{T^2}$　⑧ $\dfrac{4\pi^2 GR^3}{T^2}$

(2)　さて，宇宙船が図の点 A に来た時，接線方向に瞬間的にエンジンを噴射させて，その速さを v_A に増加させたのちエンジンを切った。その結果，宇宙船の軌道は長軸 AB の長さが $5R$ の楕円軌道となった。点 A における宇宙船の面積速度（宇宙船と太陽を結ぶ線分が単位時間に通過する面積）の大きさは 6 である。これを図の点 B における面積速度の大きさと比べると，v_A と点 B における速さ v_B の比が $\dfrac{v_A}{v_B} =$ 7 と求められる。したがって，力学的エネルギー保存則により $v_A =$ 8 $\times \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ となる。

6 の解答群

① $\dfrac{1}{4}v_A$　② $\dfrac{1}{2}v_A$　③ $2v_A$　④ $4v_A$

⑤ $\dfrac{1}{4}Rv_A$　⑥ $\dfrac{1}{2}Rv_A$　⑦ Rv_A　⑧ $2Rv_A$

7 の解答群

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{2}{3}$　④ 1

⑤ $\dfrac{3}{2}$　⑥ 2　⑦ 4　⑧ 5

8 の解答群

① $\dfrac{1}{2}$　② $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$　③ $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$　④ 1

⑤ $\sqrt{\dfrac{8}{5}}$　⑥ $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$　⑦ $\sqrt{3}$　⑧ 2

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　点Aにおける速さ v_A を変化させると，軌道も変化する。この宇宙船が太陽系の外に飛び出すためには v_A は $\boxed{9}\times\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ 以上でなければならない。ただし(2)と同じく，エンジンは点Aにおいてのみ噴射するものとする。

$\boxed{9}$ の解答群

① $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$　② $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$　③ $\sqrt{\dfrac{5}{8}}$　④ 1

⑤ $\sqrt{2}$　⑥ $\sqrt{3}$　⑦ 2　⑧ $\sqrt{5}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　解答

1

① $G\dfrac{Mm}{R^2}$　② mg　③ $\dfrac{GM}{R^2}$　④ $\dfrac{v^2}{R}$

⑤ $\sqrt{gR}$　⑥ $-G\dfrac{Mm}{R}$　⑦ $\dfrac{1}{2}mv^2+\left\{-G\dfrac{Mm}{R}\right\}$　⑧ $\sqrt{2gR}$

2

(1) $\sqrt{\dfrac{GM}{R_P}}$

(2) $\dfrac{mV_0-m'V'}{m+m'}$

(3) $\dfrac{1}{2}(m+m')V^2+\left\{-G\dfrac{M(m+m')}{r}\right\}$

(4) $\dfrac{R_P}{R_E}$

(5) $\sqrt{\dfrac{2GM}{R_E+R_P}\cdot\dfrac{R_E}{R_P}}$

(6) 1.4年後

3

(1) $G=\dfrac{gR^2}{M}$

(2) (a) $\dfrac{mgr}{R}$　(b) $\dfrac{mg}{R}x$

(3) $2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$

(4) (a) $\dfrac{mg}{2R}(R^2-h^2)$　(b) $\sqrt{\dfrac{g}{R}(R^2-h^2)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確認テスト

【解答】

1　⑧	2　⑧	3　⑥	4　①	5　④
6　⑥	7　⑦	8　⑤	9　⑤	

【解説】

(1)　周期がTゆえ，宇宙船の速さ v_0 は

$$T=\frac{2\pi R}{v_0} \qquad \therefore\ v_0=\boldsymbol{\frac{2\pi R}{T}}\ \text{—}1$$

向心力 f は，円運動の方程式を考えると，

$$m\frac{{v_0}^2}{R}=f \qquad \therefore\ f=\frac{m}{R}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2=\boldsymbol{\frac{4\pi^2 mR}{T^2}}\ \text{—}2$$

万有引力の大きさは，

$$\boldsymbol{G\frac{mM}{R^2}}\ \text{—}3$$

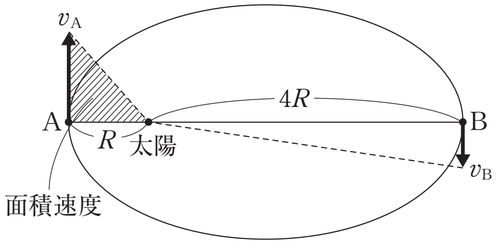
なので，

$$G\frac{mM}{R^2}=\frac{4\pi^2 mR}{T^2} \qquad \therefore\ \frac{R^3}{T^2}=\boldsymbol{\frac{GM}{4\pi^2}}\ \text{—}4$$

となり，M は，

$$M=\boldsymbol{\frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}}\ \text{—}5$$

(2)　点Aにおける面積速度は右図の斜線部。



$$\therefore\ \boldsymbol{\frac{1}{2}Rv_A}\ \text{—}6$$

ケプラーの第2法則より

$$\frac{1}{2}Rv_A=\frac{1}{2}(4R)v_B \qquad \therefore\ \frac{v_A}{v_B}=\boldsymbol{4}\ \text{—}7$$

力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)=\frac{1}{2}m{v_B}^2+\left(-G\frac{Mm}{4R}\right)$$

これと $\frac{v_A}{v_B}=4$ より，

$$v_A=\boldsymbol{\sqrt{\frac{8}{5}}}\times\sqrt{\frac{GM}{R}}\ \text{—}8$$

(3)　エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_A}^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)=\frac{1}{2}m{v_\infty}^2$$

条件は，$v_\infty \geqq 0$

$$\therefore\ \frac{1}{2}m{v_A}^2-G\frac{Mm}{R}\geqq 0 \qquad \therefore\ v_A\geqq\boldsymbol{\sqrt{2}}\times\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。